

Kúp a gömbön

Most egy elemi geometriai feladatot oldunk meg; olyat, amelyeket a középiskolások az érettségire való felkészülés során is hasznosíthatnak.

Feladat

Egy gömbre – mint egy sapkát – ráteszünk egy forgáskúp(felület)et.

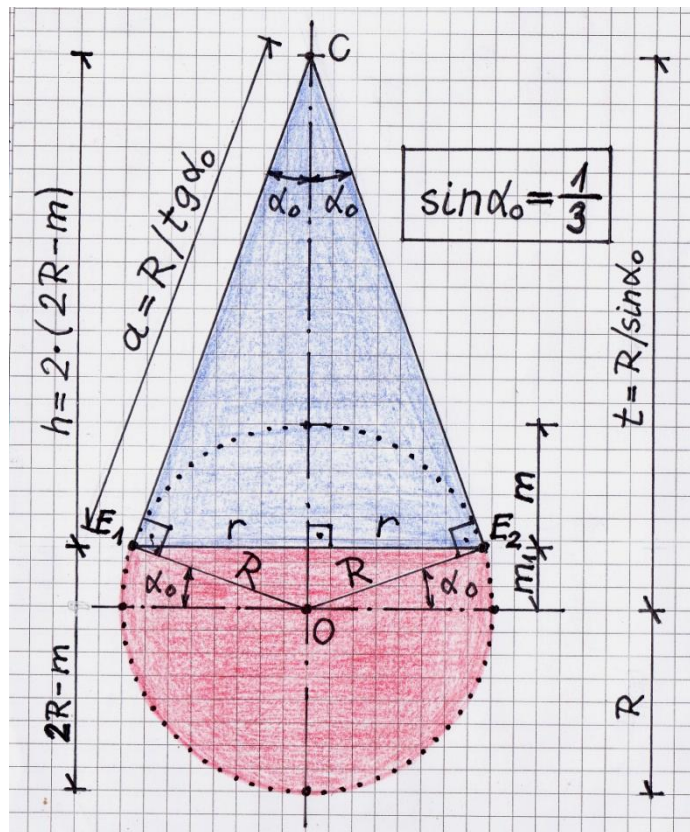
Határozzuk meg, hogy

~ mi a feltétele annak, hogy a kúp palástjának és a gömb látható részének ugyanakkora legyen a felszíne;

~ mekkora a két test együttes felszíne!

Megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Itt a megoldott feladat végeredményét szemlélhetjük. Ehhez az alábbiak során jutunk el. A kúp - palást felszíne, az 1. ábra jelöléseivel:

$$P_{kúp} = \pi \cdot r \cdot a . \quad (1)$$

A kúp r alapkörének sugarának kifejezése a gömb R sugarával:

$$r = R \cdot \cos \alpha . \quad (2)$$

Az a kúpalkotó - hossz kifejezése:

$$a = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} . \quad (3)$$

A kúp magassága, (2) - vel is:

$$h = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{R \cdot \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = R \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} . \quad (4)$$

Most (1), (2), (3) és (4) - gyel:

$$P_{kúp} = \pi \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} = \pi \cdot R \cdot R \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \pi \cdot R \cdot h . \quad (5)$$

A látszó gömbsüveg felszíne, az 1. ábra jelöléseivel:

$$A_{gömbsüveg} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (2 \cdot R - m) . \quad (6)$$

Ehhez:

$$m_1 = R \cdot \sin \alpha , \quad m = R - m_1 = R - R \cdot \sin \alpha = R \cdot (1 - \sin \alpha) . \quad (7)$$

A kúp palástja és a gömbsüveg felszínének egyenlőségéből, (5) és (6) szerint:

$$2 \cdot \pi \cdot R \cdot (2 \cdot R - m) = \pi \cdot R \cdot h \rightarrow \underline{2 \cdot (2 \cdot R - m) = h} . \quad (8)$$

A keresett feltétel egyik lehetséges kifejezése tehát az, hogy *a kúp magassága egyenlő a gömbsüveg magasságának a kétszeresével*. Ezt az eredmény - ábrán is feltüntettük.

Most (4), (7) és (8) - cal:

$$R \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cdot [2 \cdot R - (R - R \cdot \sin \alpha)] , \text{ rendezve:}$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cdot [2 - (1 - \sin \alpha)] = 2 \cdot (1 + \sin \alpha) ,$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = 2 + 2 \cdot \sin \alpha ,$$

$$\cos^2 \alpha = 2 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \sin^2 \alpha ,$$

$$1 - \sin^2 \alpha = 2 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \sin^2 \alpha ,$$

$$3 \cdot \sin^2 \alpha + 2 \cdot \sin \alpha - 1 = 0 . \quad (9)$$

A (9) másodfokú egyenlet megoldása a megoldó - képlettel:

$$\sin\alpha_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6},$$

innen az értelmes pozitív megoldás:

$$\underline{\sin\alpha_0 = \frac{1}{3}}, \quad (10)$$

ebből:

$$\underline{\alpha_0 = \arcsin \frac{1}{3} = 19,47122063^\circ \approx 19,5^\circ}. \quad (11)$$

A keresett feltétel egy másik megfogalmazása (10) és / vagy (11).

Az 1. ábra eszerint készült.

A palást - felszínek:

$$\begin{aligned} P_{kúp} &= \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{3}} = \\ &= \pi \cdot R^2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot R^2, \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$\underline{P_{kúp} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot R^2}. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A_{gömb\süveg} &= 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (R + m_1) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (1 + \sin \alpha_0) = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot R^2, \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$\underline{A_{gömb\süveg} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot R^2}, \quad (13)$$

ahogyan azt vártuk is.

Az együttes felszín ezek szerint:

$$\underline{\underline{A_{össz} = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot R^2}}}. \quad (14)$$

Ezzel feladatunkat megoldottuk.

Megjegyezzük, hogy a felhasznált képletek megtalálhatók az ismert matematikai képlet - gyűjteményekben.

Javasoljuk, hogy az Olvasó a fentiek alapján önállóan oldja meg az alábbi feladatot!

Önállóan megoldandó feladat

Egy gömbre – mint sapkákat – ráteszünk két forgáskúp(felület)et.

Határozza meg, hogy

~ mi a feltétele annak, hogy a kúppalástoknak és a gömb látható részének ugyanakkora legyen a felszíne;

~ mekkora a három test együttes felszíne!

Jó munkát!

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
mérnöktanár

Sződliget, 2015. 08. 19.